1. There are jobs assigned at random to processors (note: remember ). Consider a processor and show, with high probability in parameter , processor does not receive more than jobs. (Hint: define an appropriate indicator variable for each job and apply the following Chernoff bound).

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, bianco

Descrizione generata automaticamente

Here, we have with , an indicator variable with value if the job gets assigned to processor . Considering all events are independent, so we get .

Specifically, . Given the processor has to receive no more than jobs, this is our bound and in specific we have :

Immagine che contiene testo, Carattere, bianco, diagramma

Descrizione generata automaticamenteNow, we want to solve for



Immagine che contiene testo, Carattere, linea, bianco

Descrizione generata automaticamenteThen, we substitute everything:

Immagine che contiene testo, Carattere, linea, schermata

Descrizione generata automaticamenteThus we have:

This shows that with high probability, the processor does not receive more than jobs

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, algebra

Descrizione generata automaticamente2.

Immagine che contiene testo, Carattere, linea, bianco

Descrizione generata automaticamenteHere, given , we have:

We then set the Chernoff bounds to be:

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, numero

Descrizione generata automaticamenteSolve for :

Immagine che contiene Carattere, testo, bianco, calligrafia

Descrizione generata automaticamenteApply the Chernoff bound:

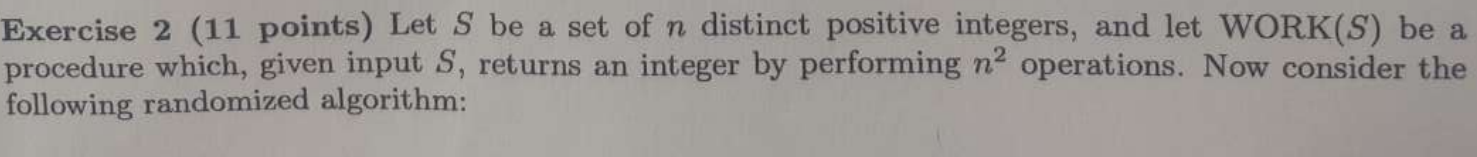
Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, calligrafia, linea

Descrizione generata automaticamente

Therefore, we have correctly proved that:

Immagine che contiene testo, menu, documento

Descrizione generata automaticamentefor , bounding correctly for a positive constant .

3.

The algorithm basically partitions the original sets into two subsets and containing elements from both sets, then calling the procedure on the larger set and returning the sum. We observe the following:

* if the sets are balanced and , then
* we want to ensure that each recursive call reduces the size of the set by a significant fraction
  + then consider a good pivot ensuring a probability of

Using Chernoff bounds, we can show that the probability of having a "bad" pivot that doesn't split the set significantly decreases exponentially. For a random pivot , the probability that the size of the larger partition the size of the larger partition is at most can be derived as follows:

Immagine che contiene testo, Carattere, calligrafia, schermata

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, calligrafia

Descrizione generata automaticamente

The total work done at each level of recursion, performs operations.

Total work done is:

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, algebra

Descrizione generata automaticamente4.

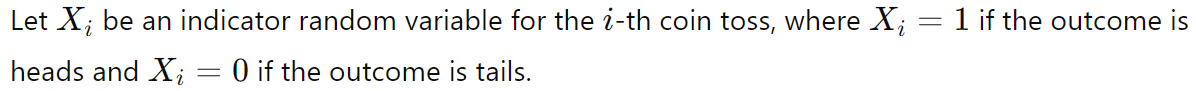


Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, linea

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, calligrafia, Carattere, schermata

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo, schermata, Carattere, diagramma

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, calligrafia

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, bianco, algebra

Descrizione generata automaticamente5.

Characterize the event:

We want to find a value for such that . In this case, it’s standard the use of this inequality:

Recall the following:

This inequality is derived from the exponential function and the binomial expansion. It represents an upper bound on the expression , showing that it grows slower than . The probability of not contracting the minimum cut in each iteration needs to be bounded and manipulated to ensure the overall algorithm's success probability is high.

Recall the following:

By choosing it follows that:

is not in the form

Let’s wrap up:

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, algebra

Descrizione generata automaticamente5.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, numero

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo, schermata, Carattere, algebra

Descrizione generata automaticamente